In maart was de tweede ronde van de Wiskunde Olympiade. De 150 winnaars van deze wedstrijd krijgen niet alleen een uitnodiging voor de finale in september, ze worden ook nog eens vier middagen uitgenodigd op de universiteit om zich optimaal te kunnen voorbereiden op de wedstrijd. Een van de onderwerpen die daar aan bod komen, is 'bewijzen uit het ongerijmde'.

■ door Maarten Solleveld

DRIJVENDE STENEN EN VLIEGENDE NIJLPAARDEN

Een van de vermakelijkste manieren om te argumenteren is *reductio ad absurdum*. Letterlijk betekent dat: terugvoeren tot het belachelijke. Bijvoorbeeld:

- Stenen zijn zwaarder dan water, want anders zouden ze blijven drijven.
- Nijlpaarden zijn geen vogels, want je ziet ze nooit vliegen.

Het typische hieraan is dat in beide gevallen een uitspraak onderbouwd wordt door te kijken naar zijn ontkenning. Er wordt opgemerkt dat die ontkenning leidt tot een absurde situatie, en daarmee klinkt de oorspronkelijke claim veel plausibeler. Zo'n soort argument komt best vaak voor; waarschijnlijk gebruik je het zelf ook wel eens zonder er bij stil te staan. Maar waterdicht is deze methode natuurlijk niet, want struisvogels zijn wel vogels maar vliegen niet.

In de wiskunde kun je dit stramien ook gebruiken; daar heet het *bewijs uit het ongerijmde*. Je bewijst dan een uitspraak door aan te nemen dat hij niet waar is, en daaruit een tegenspraak af te leiden. Dus in plaats van een direct argument vóór een uitspraak te geven, laat je zien dat deze niet níét waar is. Dit komt bijvoorbeeld in het volgende geval van pas.

Claim. Er bestaat geen kleinste rationaal getal groter dan nul.

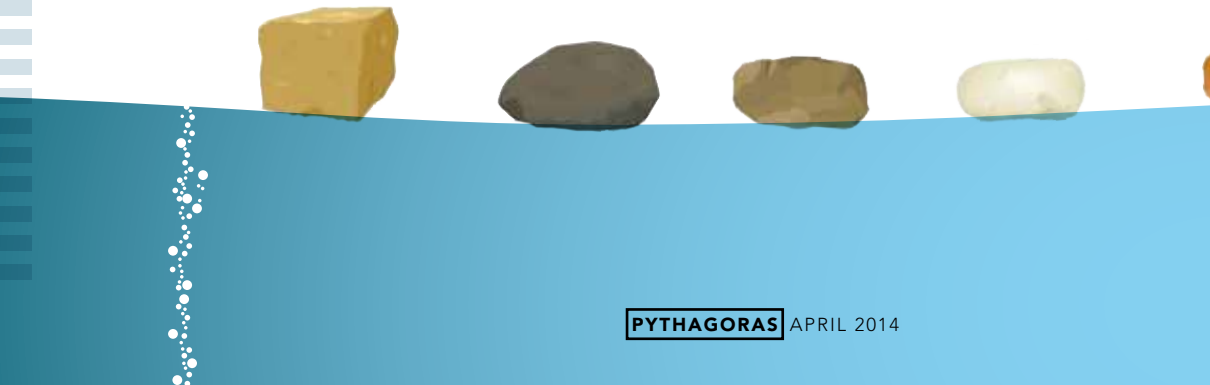
Het bewijs gaat in twee stappen.

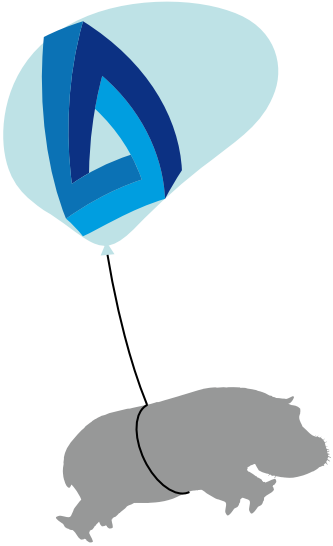
1. We nemen de ontkenning van de uitspraak aan. Stel, er is een kleinste rationaal getal groter dan nul. Noem dat x.
2. Hieruit leiden we een tegenspraak af. Bekijk $x/2$. Dit is een rationaal getal, het is positief en kleiner dan x. Dus x was toch niet het kleinste. Tegenspraak! Dus de aanname in stap 1 is fout en dan moet de claim wel waar zijn.

Een bewijs uit het ongerijmde is wel vaker handig bij uitspraken van het type 'Laat zien dat er geen ding met eigenschappen xyz bestaat'. Het oudste bekende bewijs uit het ongerijmde komt van Euclides, een Griekse wiskundige die rond 300 voor Christus leefde.

Stelling. Er zijn oneindig veel priemgetallen.

Hoe kun je laten zien dat er oneindig veel exemplaren van iets zijn? Je kunt aan een lijstje beginnen: 2,





3, 5, 7, 11, 13, 17, ... en van elk natuurlijk getal nagaan of het priem is of niet. Maar dat kost oneindig veel papier, oneindig veel pennen en oneindig veel geduld. Dat schiet niet op. Het bewijs van Euclides is duidelijk sneller:

1. Neem aan dat er slechts eindig veel priemgetallen zijn, zeg $p_1, p_2, \ldots, p_m$.
2. Definieer N als één plus het product van deze priemgetallen:

$$N = 1 + p_1 p_2 \cdots p_m.$$

Geen enkel al bekend priemgetal p_i is een deler van N, want de rest van N bij deling door p_i is 1. Maar dat is raar, want we kunnen laten zien dat elk geheel getal groter dan 1 deelbaar is door een priemgetal. En dan krijgen we de tegenspraak die nodig is voor een bewijs uit het ongerijmde.

Om de genoemde eigenschap te laten zien, bekijken we de kleinste deler d van N die groter dan 1 is. Misschien is d gelijk aan N, maar dat maakt voor het argument niet uit. In ieder geval is d priem, aangezien N anders een nog kleinere deler zou hebben. (Deze stap is eigenlijk een kort bewijsje uit het ongerijmde.) Omdat de priemgetallen p_i geen delers van N zijn, is d niet gelijk aan een p_i. Dus d is een priemgetal dat nog niet in onze lijst staat. Dit is in tegenspraak met de aanname in stap 1. Klaar!

BROUWER VERSUS HILBERT Er is een anekdote over een wiskundige die op de radio werd geïnterviewd. Hij vertelde dat Euclides al meer dan 2000 jaar geleden had bewezen dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Daarop vroeg de interviewer prompt: 'Zijn er nog steeds oneindig veel?'

Dat klinkt stom, want een bewijs blijft altijd geldig – juist dat maakt het een bewijs. Maar toch, over bewijzen uit het ongerijmde is in het wat recentere verleden flink geruzied. L.E.J. Brouwer (1881-1966), de Nederlandse kampioen wiskunde aan het begin van de twintigste eeuw, had het er maar moeilijk mee. Bewijzen dat iets niet niet kan? Wat een zwaktebod, wat een gedoe! Laat liever zien dat je het echt wel kunt!

Zijn tegenstander was de Duitser Hilbert (1862-1943), die toentertijd werd beschouwd als de beste wiskundige ter wereld. Hij vond het prima, zo'n bewijs uit het ongerijmde. Heel handig voor sommige moeilijke resultaten. Bovendien had Hilbert het zelf al vaak gebruikt. Als Brouwer en Hilbert voetbalsupporters waren geweest, dan waren ze elkaar hierom te lijf gegaan. Maar ze waren wetenschappers, dus ze bestreden elkaar met veel boze brieven.

Na verloop van tijd bleek dat velen Hilbert volgden, en daarmee had Brouwer de strijd verloren. Later zagen wiskundigen de grote waarde van de bedenkingen van Brouwer. Bewijzen uit het ongerijmde zijn algemeen geaccepteerd. Dus wat Euclides 2300 jaar geleden al bewees, geldt echt: er zijn nog steeds oneindig veel priemgetallen.

TRAINING Meer over bewijzen uit het ongerijmde bij de olympiade is te vinden in het trainingsmateriaal op de website van de Nederlandse Wiskunde Olympiade: www.wiskundeolympiade.nl/ft. Natuurlijk worden daar ook andere bewijsmethoden besproken!

Op deze pagina staan drie opgaven uit finales van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, één uit 1978, één uit 2007 en één van vorig jaar. Bij alle drie de opgaven bestaat de oplossing uit een bewijs uit het ongerijmde. ■

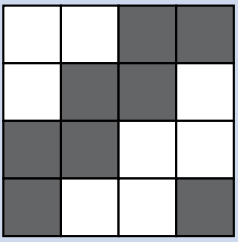
1 (finale 1978). Bewijs dat er geen gehele getallen x en y zijn, die voldoen aan de vergelijking $3x^2 = 9 + y^3$.

OPLOSSING Stel dat er wel gehele getallen x en y zijn die voldoen aan de vergelijking $3x^2 = 9 + y^3$. Dan moet y^3 wel deelbaar zijn door 3, dus y ook. We schrijven daarom $y = 3k$, zodat de vergelijking overgaat in $3x^2 = 9 + 3^3 \cdot k^3$, oftewel $x^2 = 3 + 9k^3$. Maar dan moet x^2 en dus ook x wel deelbaar zijn door 3. We schrijven $x = 3m$ en komen uit op $9m^2 = 3 + 9k^3$, oftewel $3m^2 = 1 + 3k^3$. Dit is echter onmogelijk, want $1 + 3k^3$ is geen drievoud. We concluderen dat er dus geen x en y kunnen zijn met $3x^2 = 9 + y^3$.

2 (finale 2007). Is het mogelijk om de verzameling $A = \{1, 2, 3, ..., 32, 33\}$ op te delen in elf deelverzamelingen met elk drie getallen waarbij voor elk van de elf deelverzamelingen geldt dat één van de drie getallen gelijk is aan de som van de andere twee getallen? Zo ja, geef dan zo'n verdeling in drietallen; zo nee, bewijs dan dat het niet mogelijk is.

OPLOSSING Nee, zo'n verdeling is niet mogelijk. Stel dat er wél zo'n verdeling in elf deelverzamelingen bestaat. Elke deelverzamelingen bestaat uit drie getallen, zeg a, b en c, die voldoen aan $a + b = c$ en bijgevolg ook aan $a + b + c = 2c$. Dus voor elke deelverzamelingen is de som van de getallen even. Maar dan moet de som van alle getallen 1, 2, 3, ..., 33 ook even zijn. Echter, $1 + 2 + 3 + \cdots + 33 = \frac{1}{2} \cdot 33 \cdot (33 + 1) = 33 \cdot 17$ en dat is een oneven getal. Tegenspraak. Dus er bestaat geen verdeling van A met de gewenste eigenschappen.

3 (finale 2013). Van een tabel bestaande uit n bij n vierkantjes zijn sommige vierkantjes zwart en zijn de overige vierkantjes wit. Voor ieder tweetal kolommen en ieder tweetal rijen geldt dat de vier vierkantjes op de kruisingen van die rijen en kolommen niet allemaal dezelfde kleur hebben. Wat is de grootst mogelijke waarde van n?



OPLOSSING We zullen bewijzen dat $n = 4$ de grootst mogelijke n is waarvoor een $n \times n$-tabel volgens de regels kan worden gekleurd. Dat $n = 4$ mogelijk is, zie je in de figuur.

We bewijzen nu dat er geen kleuring van de vierkantjes in een 5×5-tabel bestaat die aan de voorwaarde voldoet. Stel maar eens dat zo'n kleuring wel bestaat. Van de vierkantjes in elke rij is óf de meerderheid zwart, óf de meerderheid wit. We mogen wel aannemen dat er minstens drie rijen zijn met een meerderheid aan zwarte vierkantjes (het geval met minstens drie rijen met een meerderheid aan wit gaat op dezelfde manier). We bekijken nu de vierkantjes binnen drie van deze rijen. Van deze 15 vierkantjes zijn er dus minstens 9 zwart. Als er een kolom is waarin elk van de drie rijen een zwart vakje heeft, dan kan elke andere kolom in hoogstens één van deze drie rijen een zwart vakje hebben. Het totaal aantal zwarte vakjes in de drie rijen is dan hoogstens $3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 < 9$, een tegenspraak.

In elke kolom hebben dus hoogstens twee van de drie rijen een zwart vakje. We bekijken het aantal kolommen met twee zwarte vakjes in de drie rijen. Als dit er meer dan drie zijn, dan hebben twee kolommen in dezelfde twee rijen een zwart vakje, en dat kan niet. Het aantal zwarte vakjes in de drie rijen is dus hoogstens $2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8$, wederom een tegenspraak. Het is dus niet mogelijk om een 5×5-tabel volgens de voorwaarden te kleuren. Duidelijk is, dat het dan ook onmogelijk is om een $n \times n$-tabel volgens de eisen te kleuren wanneer $n > 5$.